

Homologische Algebra für die gymnasiale Oberstufe

Joachim Zobel
jz-2018@heute-morgen.de

2. April 2018

1 Einführung

1.1 Vorbemerkung

Die in der Schule vermittelte Mathematik ist inhaltlich mindestens zweihundert Jahre alt. Eine Ausnahme bildet die nur gut hundert Jahre alte Mengenlehre. Diese in der Schule eingeführt zu haben ist ein Verdienst der “Neuen Mathematik” vor knapp 50 Jahren.

Um beim Schliessen dieser Lücke zu helfen, stellt dieser Artikel mit der homologischen Algebra eines der zentralen mathematischen Konstrukte des 20. Jahrhunderts vor. Wer in einer mathematischen Sprache über Form sprechen will, wird zwangsläufig auf Homologie stossen. Homologie (und Kohomologie) tauchen entsprechend in weiten Bereichen von Mathematik und Physik auf. In jüngerer Zeit haben die Neurowissenschaften diese Methodik erfolgreich anwenden können.

Dieser Text ist für mathematisch interessierte Schüler gedacht. Schüler eines Mathematik Leistungskurses sollen ihn verstehen können. Schwierig für Schüler ist eventuell, dass die betrachteten Matrizen sehr schnell recht groß werden. Hier ist ein Mathematikprogramm wie zum Beispiel Maxima hilfreich.

1.2 Einige Anmerkungen

Meine Vorstellung ist, dass es einen gesellschaftlichen Aneignungsprozess für wissenschaftliche Erkenntnisse geben muss. Das Pluszeichen stammt aus dem 15. Jahrhundert. Kinder verwenden es heute spätestens in der Grundschule. Die Differentialrechnung stammt aus dem späten 17. Jahrhundert und wird in der Oberstufe behandelt.

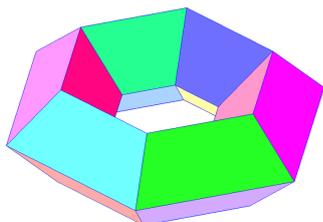
Dieser Prozess ist fundamental für den Fortschritt der Wissenschaft. Würden das Pluszeichen in der Oberstufe und die Differentialrechnung an der Universität gelehrt, könnten auch die brilliantesten Köpfe nicht den heutigen Stand der mathematischen Forschung erreichen.

Leider ist die aktuelle Situation der obigen vergleichbar.

1.3 Motivation

Berechne für mehrere Polyeder die Eulercharakteristik

$$\chi = \text{Anzahl}(Ecken) - \text{Anzahl}(Kanten) + \text{Anzahl}(Flaechen) \quad (1.3.1)$$



Beispiele mit den benötigten Anzahlen finden sich im Wikipediaartikel über platonische Körper. Tue das selbe für einen polyedralen Torus wie den nebenstehend Abgebildeten.

1.4 Voraussetzungen und Grenzen

Abb. 1: Hexagonaler Torus

Es wird der Begriff des Körpers vorausgesetzt. Wer ihn nicht kennt, sollte mit dem Wissen zurechtkommen, daß die rationalen und reellen Zahlen Körper sind.

Die durchgeführten Konstruktionen funktionieren allgemeiner für freie abelsche Gruppen an Stelle der hier verwendeten Vektorräume. Dadurch würde jedoch der verwendete algebraische Apparat für Schüler, die eventuell schon mit Vektorräumen vertraut sind, fremdartiger. Deshalb beschränkt sich dieses Dokument auf Vektorräume. Die in diesem Dokument berechneten Homologiegruppen werden trotzdem als Gruppen bezeichnet, obwohl sie dadurch ebenfalls Vektorräume sind.

Der aufgebaute Apparat wird zwar auf topologische Räume angewendet, jedoch bleibt die Sichtweise kombinatorisch und es wird keine explizite Topologie verwendet. Ziel ist es, die Homologie beispielhaft zu illustrieren.

Diese Vorgehensweise ist mathematisch zweifelhaft. Sie hat jedoch den Vorteil, dass die angestellten Betrachtungen für Schüler gut nachvollziehbar sind. Leider kann dadurch der wesentliche Begriff der Homotopieinvarianz nicht formuliert werden.

1.5 Vektorräume

Da Vektorräume das zentrale Werkzeug sind, folgen hier die wesentlichen Definitionen.

Eine Gruppe ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, die ein Einselement sowie zu jedem Element ein inverses Element hat. Beispiele sind $(\mathbb{Z}, +)$ - hier ist die 0 Einselement - und (\mathbb{Q}^+, \cdot) .

Definition: Ein **Vektorraum** über einem Körper $(K, +, \cdot)$ oder kurz ein K -Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar

aus K erklärt ist:

$$*: K \times V \rightarrow V$$

Diese Skalarmultiplikation muss dabei für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\alpha * (\beta * v) = (\alpha \cdot \beta) * v \quad (1.5.2)$$

$$\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v \quad (1.5.3)$$

$$(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v \quad (1.5.4)$$

$$1 * v = v \quad (1.5.5)$$

Für eine Menge M und einen Körper K heiße

$$V(M) = \{f : M \rightarrow K \mid f^{-1}(K \setminus \{0\}) \text{ endlich}\}$$

der von M aufgespannte K -Vektorraum.

Für $x \in M$ heißt $e_x : V(M) \rightarrow K$ mit $e_x(x) = 1$ und $e_x(x') = 0$ für $x \neq x'$ die charakteristische Abbildung von x . Elemente von $V(M)$ werden im Folgenden als Summen von charakteristischen Abbildungen in der Form $a_1 * x_1 + \dots + a_n * x_n$ geschrieben. Hierbei wird x_i als abkürzende Schreibweise für e_{x_i} verwendet.

Damit läßt sich jedes Element als Summe von Vielfachen der Erzeugenden schreiben. Beispielsweise ist $2 * Apfel + 3 * Birne$ ein Element von $V(\{Apfel, Birne\})$. Vektorräume erfüllen damit den lange gehegten Wunsch, Äpfel und Birnen zu addieren. Tatsächlich ist bei jedem linearen Gleichungssystem implizit ein Vektorraum vorhanden. Der vorgenannte Vektorraum kommt also bei Aufgaben wie "Bauer Berger hat drei mal so viele Äpfel wie Birnen. Wenn er 90 Äpfel essen würde, hätte er gleich viele. Wie viele Äpfel hat er?" ins Spiel.

Dies ist die algebraische Sicht auf Vektorräume. Ein Vektorraum ist dabei nicht eine Beschreibung des uns umgebenden Raumes, sondern ein Gebilde, in dem man nach bestimmten Regeln rechnen kann. In diesem Dokument wird es so gesehen darum gehen, Systeme von Gleichungen zwischen Ecken, Kanten und Flächen von Polyedern zu untersuchen.

Definition: Seien $U \subseteq V$ Vektorräume über einem Körper K . U heißt Untervektorraum von V , wenn

$$\alpha * u \in U \text{ für alle } \alpha \in K, u \in U \quad (1.5.6)$$

$$u + v \in U \text{ für alle } u, v \in U \quad (1.5.7)$$

gilt.

Der Begriff des Quotientenraumes ist schwieriger.

Definition: Seien U in Untervektorraum von V . Dann bilden die Äquivalenzklassen der Relation

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U \quad (1.5.8)$$

einen Vektorraum. Dieser wird der Quotientenraum V/U genannt.

Definition: Seien V und W Vektorräume über einem gemeinsamen Grundkörper K . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ die folgenden Bedingungen gelten:

$$af(x) = f(ax) \quad (1.5.9)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1.5.10)$$

Zwei bei der Untersuchung linearer Abbildungen wichtige Mengen sind das Bild $im(f)$ und der Kern $ker(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$. Es ist

$$im(f) = \{f(v) | v \in V\} \quad (1.5.11)$$

$$ker(f) = \{x \in V | f(x) = 0\} \quad (1.5.12)$$

Zeige: Bild und Kern sind Untervektorräume.

Ist $ker(f) = \{0\}$, so heißt f ein Monomorphismus, ist $im(f) = W$, so heißt f ein Epimorphismus. Eine lineare Abbildung, die sowohl Epimorphismus als auch Monomorphismus ist, wird Isomorphismus genannt. Zwei Vektorräume heißen isomorph, wenn zwischen ihnen ein Isomorphismus existiert.

Zeige: Monomorphismen sind injektiv, Epimorphismen sind surjektiv.

Damit sind Isomorphismen bijektiv.

Zeige: Die inverse Abbildung zu einem Isomorphismus ist eine lineare Abbildung.

Es ist $K^n = V(1, \dots, n)$. Man sagt ein K -Vektorraum habe die Dimension n , wenn er isomorph zum K^n ist.

Bild und Kern stehen über den Dimensionssatz in Beziehung. Dieser sagt aus, dass die Dimension von V gleich der Summe der Dimensionen des Bildes und des Kerns ist:

$$\dim V = \dim ker(f) + \dim im(f) \quad (1.5.13)$$

Der Dimensionssatz lässt sich auf Quotientenräume anwenden. Für

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{q} V/U$$

mit der Einbettung i und der Quotientenabbildung q ist U gerade der Kern der Quotientenabbildung. Damit ist

$$\dim V = \dim U + \dim V/U. \quad (1.5.14)$$

1.6 Kettenkomplexe

Jetzt können wir endlich die zentralen Begriffe definieren.

Definition: Ein **Kettenkomplex** besteht aus einer Folge

$$C_n, n \in \mathbb{Z}$$

von K -Vektorräumen und einer Folge

$$d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$$

von linearen Abbildungen, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0$$

für alle n gilt. Hier bezeichnet \circ das nacheinander Ausführen von Abbildungen.

Elemente von C_n heißen n -Ketten. Elemente von $Z_n(C, d) := \ker d_n \subseteq C_n$ heißen n -**Zykel** während Elemente von $B_n(C, d) := \operatorname{im} d_{n+1} \subseteq C_n$ n -**Ränder** heißen. Die Bedingung $d_n d_{n+1} = 0$ besagt, dass jeder Rand ein Zykel ist.

Der Quotient

$$H_n(C, d) := Z_n(C, d) / B_n(C, d)$$

heißt n -te **Homologiegruppe** des Kettenkomplexes (C, d) , ihre Elemente heißen Homologieklassen. Zykel, die in derselben Homologiekategorie liegen, heißen homolog.

2 Ausführung

2.1 Zykel

Wir illustrieren als erstes den Begriff des Zykel. Dazu betrachten wir das Dreieck ABC . In diesem sind $E = \{A, B, C\}$ die Ecken und $K = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}\}$ die Kanten. Man beachte, dass hier eine Auswahl stattfindet. Es wird beispielsweise \overline{AB} , aber nicht \overline{BA} gewählt. Damit wählen wir zu jeder Kante eine Richtung. Die nachfolgenden Rechnungen hängen nicht von dieser Auswahl ab. Bei der entsprechenden anderen Wahl kann man dort $-\overline{BA}$ an Stelle von \overline{AB} verwenden.

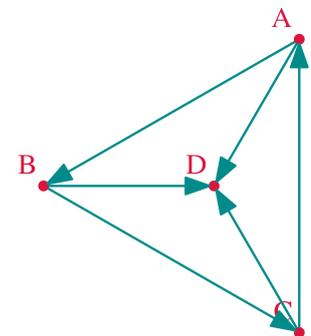


Abb. 2: Dreiecke

Die Randabbildung d_1 vom Vektorraum über den Kanten $V(K)$ in den Vektorraum über den Ecken $V(E)$ ist durch

$$d_1(\overline{XY}) = X - Y \text{ für } X, Y \in \{A, B, C, D\} \quad (2.1.15)$$

gegeben. Die Abbildung d_1 bildet jede Kante auf die Differenz ihrer Endpunkte ab. Bei einer Summe von Kanten, die eine geschlossene Schleife bilden, taucht jeder Endpunkt als Rand zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen auf. Dadurch ist der Rand einer solchen Schleife 0. Geschlossene Schleifen sind also 1-Zykel. In unserem Fall ist die Summe über alle Kanten ein Zykel:

$$d_1(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = A - B + B - C + C - A = 0 \quad (2.1.16)$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Feststellung, dass die Schleifen in einem Graphen einen Vektorraum bilden, da sie der Kern von d_1 sind. Wir erweitern das Beispiel, um uns das genauer anzuschauen. Wenn wir die Ecke D zu unserem Dreieck hinzunehmen, haben wir 4 Ecken und 6 Kanten, die man aus der nebenstehenden Abbildung entnehmen kann. Die Randabbildung d_1 nach Hinzunahme von D ist schon in 2.1.15 definiert. Es sind dann auch $\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{AD}$, $\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{BD}$ und $\overline{CA} + \overline{AD} - \overline{CD}$ Zykel. Das äussere Dreieck, d.h. der Zykel

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = (\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{AD}) + (\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{BD}) + (\overline{CA} + \overline{AD} - \overline{CD}) \quad (2.1.17)$$

ergibt sich als Summe der inneren Dreiecke. Die Frage, wie viele Dreiecke man in der obigen Abbildung sieht, gewinnt dadurch einen neuen interessanten Aspekt. Von den vier Dreiecken sind nur drei unabhängig.

Tatsächlich ist eine konsistente Definition einer ‘‘Anzahl der Löcher’’ schwierig. Homologische Algebra ist einer der Wege zu einer solchen Definition. Zur Veranschaulichung ziehe man in der obigen Abbildung den Punkt D aus der Ebene heraus, bis man die Kanten eines Tetraeders hat, d.h. bis alle Kanten gleich lang sind. Dann gibt es vier identische Schleifen. Aus der Anschauung heraus würde man hier von vier Schleifen ausgehen, während man bei dem abgebildeten Graphen nur drei zählt.

2.2 Ränder

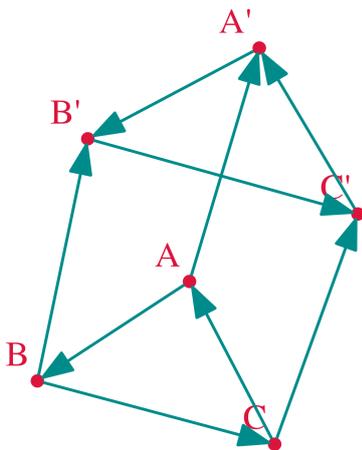


Abb. 3: Prisma

Wir betrachten das Prisma zwischen den Dreiecken ABC und $A'B'C'$. Hier nehmen wir die Vierecke $\square XY = XYY'X'$ mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ als Flächen an, während die Dreiecke offen sind. Wir haben es also mit einem dreieckigen Rohr zu tun. Dann sind durch $F = \{\square AB, \square BC, \square CA\}$ die Flächen, durch $K = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'A'}, \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}\}$ die Kanten und durch $E = \{A, B, C, A', B', C'\}$ die Ecken gegeben. Dann ist

$$d_2(\square XY) = \overline{XY} + \overline{YY'} - \overline{X'Y'} - \overline{XX'} \quad (2.2.18)$$

der Rand eines Vierecks. Dies definiert die Randabbildung d_2 von $V(F)$ nach $V(K)$. Die Ränder der Dreiecke sind 1-Zykel, d.h. mit der wie gehabt durch

$$d_1(\overline{XY}) = X - Y \quad (2.2.19)$$

gegebenen Randabbildung von $V(K)$ nach $V(E)$ gilt

$$d_1(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = 0 \quad (2.2.20)$$

$$d_1(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}) = 0 \quad (2.2.21)$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} & \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} - d_2(\square AB) - d_2(\square BC) - d_2(\square CA) \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ & \quad - \overline{AB} - \overline{BB'} + \overline{A'B'} + \overline{AA'} \\ & \quad - \overline{BC} - \overline{CC'} + \overline{B'C'} + \overline{BB'} \\ & \quad - \overline{CA} - \overline{AA'} + \overline{C'A'} + \overline{CC'} \\ &= \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Die Zykel der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ unterscheiden sich nur um die Ränder der Vierecke. Damit sind sie in der ersten Homologiegruppe des Prismas äquivalent.

2.3 Zusammenhang

Als nächstes betrachten wir zusammenhängende Graphen. Ein Graph heisst zusammenhängend, wenn es für zwei Ecken immer eine diese verbindende Kantenfolge gibt. Eine Kantenfolge ist eine Menge von Ecken $\{e_1, \dots, e_n\}$ für die es eine Kante k mit den Ecken e_i, e_{i-1} für jedes i gibt. Eine solche Kantenfolge nennen wir einen Weg von e_1 nach e_n . Für zusammenhängende Graphen berechnen wir H_0 .

Sei

$$s : V(E) \rightarrow K, e \mapsto 1 \text{ für } e \in E$$

die Abbildung, die alle Ecken auf den Wert 1 abbildet. Dann ist $s(d_1(k)) = s(e_1 - e_2) = 1 - 1 = 0$ für alle Kanten. Damit ist $\text{im}(d_1) \subseteq \ker(s)$. Wir zeigen als nächstes, dass beide sogar gleich sind.

Für zwei Ecken a, b sei $w(a, b) \in V(K)$ mit $d_1(w(a, b)) = a - b$ ein verbindender Weg. Damit liegt die Differenz zweier beliebiger Ecken in $V(E)$ im Bild von d_1 . Es sei $\sum a_i e_i \in \ker(s)$ mit $e_i \in E$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= s\left(\sum a_i e_i\right) \\ &= \sum a_i \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Wir formen $\sum a_i e_i$ um.

$$\begin{aligned} \sum a_i e_i &= a_1(e_1 - e_2) + (a_1 + a_2)(e_2 - e_3) \\ & \quad + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1})(e_{n-1} - e_n) \\ & \quad + (a_1 + \dots + a_n)e_n \\ &= a_1 d_1(w(e_1, e_2)) + (a_1 + a_2) d_1(w(e_2, e_3)) \\ & \quad + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1}) d_1(w(e_{n-1}, e_n)) \\ & \in \text{im}(d_1) \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Damit ist jedes Element aus dem Kern von s auch im Bild von d_1 enthalten und es gilt $\ker(s) = \text{im}(d_1)$. Gleichzeitig ist damit auch s ein Isomorphismus $s : H_0 \simeq K$.

2.4 Der Würfel

Um die Definition des Kettenkomplexes weiter mit Leben zu füllen betrachten wir nun ein komplexeres Beispiel.

Wir betrachten einen hohlen Würfel im \mathbb{R}^3 . Dabei sind die Ecken durch $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ für die 8 möglichen Vorzeichenkombinationen gegeben, d.h. $E = \{+1, -1\}^3$. Bei Kanten bezeichnen wir die zwischen -1 und $+1$ variierende Dimension mit einem $*$, d.h.

$$(\pm 1, *, \pm 1) = \{(\pm 1, x, \pm 1) | x \in [-1, +1]\}. \quad (2.4.25)$$

Flächen werden analog mit

$$(\pm 1, *, *) = \{(\pm 1, x, y) | x, y \in [-1, +1]\} \quad (2.4.26)$$

bezeichnet. Die Schreibweise ± 1 steht hier jeweils für einen Wert, der entweder $+1$ oder -1 sein kann.

Dann sind Randabbildungen durch

$$d_1 : (a, *, b) \mapsto (a, +1, b) - (a, -1, b) \quad (2.4.27)$$

und

$$d_2 : (c, *, *) \mapsto -(c, +1, *) + (c, -1, *) + (c, *, +1) - (c, *, -1) \quad (2.4.28)$$

$$(*, c, *) \mapsto (+1, c, *) - (-1, c, *) - (*, c, +1) + (*, c, -1)$$

$$(*, *, c) \mapsto -(+1, *, c) + (-1, *, c) + (*, +1, c) - (*, -1, c)$$

gegeben. Hier stehen a, b, c für beliebige Werte aus $\{+1, -1\}$ und die Abbildung d_1 ist in gleicher Weise für Tupel mit vertauschten Elementen definiert.

In unserem Beispiel hat der Graph der Würfelkanten 5 linear unabhängige Schleifen, die Ränder der Seitenflächen sind. Die sechste ergibt sich (bis auf Vorzeichen) als Summe der anderen fünf. Das $\ker(d_1)$ fünfdimensional ist, wird in 2.4.33 als Ergebnis ausgerechnet werden.

Die Ränder der Seitenflächen sind diese umlaufenden Schleifen und damit 1-Zykel. Dies wird als Erstes nachgerechnet. Wir überprüfen, dass die Sequenz

$$V(E) \xleftarrow{d_1} V(K) \xleftarrow{d_2} V(F)$$

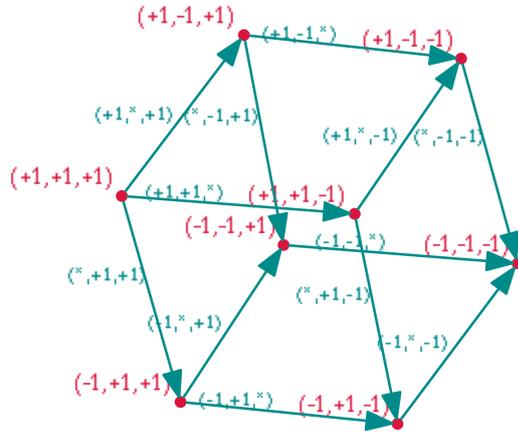


Abb. 4: Würfelkanten

ein Kettenkomplex ist.

$$\begin{aligned}
d_1(d_2(*, c, *)) &= d_1((+1, c, *) - (-1, c, *) + (*, c, +1) - (*, c, -1)) \\
&= (+1, c, +1) - (+1, c, -1) - ((-1, c, +1) - (-1, c, -1)) \\
&\quad - ((+1, c, +1) - (-1, c, +1)) + (+1, c, -1) - (-1, c, -1) \\
&= (+1, c, +1) - (+1, c, -1) - (-1, c, +1) + (-1, c, -1) \\
&\quad - (+1, c, +1) + (-1, c, +1) + (+1, c, -1) - (-1, c, -1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Damit ist der Kettenkomplex des Würfels:

$$\{0\} \xleftarrow{d_0} K^8 \xleftarrow{d_1} K^{12} \xleftarrow{d_2} K^6 \xleftarrow{d_3} \{0\}$$

Hier ist K der verwendete Körper.

Sei $s : V(E) \rightarrow K$ die Abbildung aus 2.3, die alle Ecken auf 1 abbildet.

Sei $t : K \rightarrow V(F)$, $1 \mapsto (+1, *, *) - (-1, *, *) + (*, +1, *) - (*, -1, *) + (*, *, +1) - (*, *, -1)$ die Abbildung, die 1 auf die Summe aller Flächen abbildet. Dann ist

$$\begin{aligned}
d_2(t(1)) &= d_2((+1, *, *) - (-1, *, *) \\
&\quad + (*, +1, *) - (*, -1, *) \\
&\quad + (*, *, +1) - (*, *, -1)) \\
&= -(+1, +1, *) + (+1, -1, *) + (+1, *, +1) - (+1, *, -1) \\
&\quad + (-1, +1, *) - (-1, -1, *) - (-1, *, +1) + (-1, *, -1) \\
&\quad + (+1, +1, *) - (-1, +1, *) - (*, +1, +1) + (*, +1, -1) \\
&\quad - (+1, -1, *) + (-1, -1, *) + (*, -1, +1) - (*, -1, -1) \\
&\quad + (*, +1, +1) - (*, -1, +1) - (+1, *, +1) + (-1, *, +1) \\
&\quad - (*, +1, -1) + (*, -1, -1) + (+1, *, -1) - (-1, *, -1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Wir schreiben d_2 als Matrix.

$$\begin{array}{cccccc}
& + ** & - ** & * + * & * - * & ** + & ** - \\
* + + & \left(\begin{array}{cccccc}
& & & -1 & & 1 \\
& & & 1 & & 1 \\
& & & & -1 & -1 \\
& & & & 1 & -1 \\
+ * + & 1 & & & & -1 \\
+ * - & -1 & & & & -1 \\
- * + & & 1 & & & 1 \\
- * - & & -1 & & & 1 \\
+ + * & -1 & & 1 & & \\
+ - * & 1 & & & 1 & \\
- + * & & -1 & -1 & & \\
- - * & & 1 & & -1 &
\end{array} \right)
\end{array}$$

Die Dimension des Bildes von d_2 ist der Rang dieser Matrix. Diesen rechnet man mit dem gaußschen Eliminationsverfahren aus. Alternativ hilft hier ein Programm wie Maxima. Eine explizite Berechnung würde den Rahmen dieses Dokumentes sprengen und wäre eher langweilig. Man erhält $\dim(\text{im}(d_2)) = 5$. Damit ist durch den Dimensionssatz 1.5.13 $\dim(\text{ker}(d_2)) = 1$ und die Einbettung t ist ein Isomorphismus $t : K \simeq H_2$.

Da der Würfel zusammenhängend ist, ist $H_0 = K$ bzw. $\dim(H_0) = 1$. Damit ist $\dim(H_0) + \dim(\text{im}(d_1)) = 8$ und $\dim(\text{im}(d_1)) = 7$.

Aus

$$\begin{aligned}
\dim(\text{im}(d_1)) + \dim(\text{ker}(d_1)) &= 12 \\
\dim(\text{im}(d_2)) + \dim(\text{ker}(d_2)) &= 6
\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

folgt damit und mit

$$\begin{aligned}
\dim(\text{im}(d_1)) &= 7 \\
\dim(\text{im}(d_2)) &= 5
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

dass

$$\begin{aligned}
\dim(\text{ker}(d_1)) &= 5 \\
\dim(\text{ker}(d_2)) &= 1
\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Damit ist $H_1 = \{0\}$ und $H_2 = K$.

2.5 Invarianz

Bemerkenswert ist, dass es sich bei den Homologiegruppen um Homotopieinvarianten handelt. Sie hängen nicht von der gewählten Zerlegung ab und stimmen für ineinander deformierbare Formen überein. Der Würfel ist in diesem Zusammenhang eine Zerlegung der Kugeloberfläche. Alle anderen platonischen Körper sind alternative Zerlegungen. Die Verallgemeinerung der in diesem Zusammenhang verwendbaren Zerlegungen sind die CW-Komplexe.

Aus der Invarianz der Homologiegruppen läßt sich direkt die Invarianz der Eulercharakteristik 1.3.1 folgern. Diese ergibt sich mittels des Dimensionssatzes 1.5.13 als

$$\chi = \dim(H_0) - \dim(H_1) + \dim(H_2)$$

2.6 Die projektive Ebene

Die projektive Ebene erhält man als Menge der Äquivalenzklassen im \mathbb{R}^3 bezüglich der Relation $x \simeq y$ wenn $x = k * y$ für $k \neq 0$. Mit der Ebene mit $x_3 = 1$ sowie einem Fernpunkt für jede Richtung in dieser Ebene erhält man eine Menge von Repräsentanten der Äquivalenzklassen. Das Bemerkenswerte ist, dass eine Verschiebung über diesen Horizont wie eine Spiegelung wirkt und die Orientierung umkehrt.

Man kann die projektive Ebene P als Rechteck R mit gegenläufig identifizierten Kanten auffassen. Daraus ergeben sich die folgenden Randabbildungen:

$$d_2 : R \mapsto 2a + 2b \quad (2.6.34)$$

und

$$\begin{aligned} d_1 : a &\mapsto A - B & (2.6.35) \\ b &\mapsto B - A \end{aligned}$$

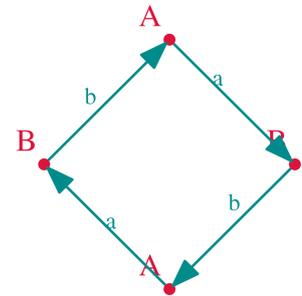


Abb. 5: Projektive Ebene

Hier haben wir die interessante Situation, dass die Auswahl des Körpers einen wesentlichen Unterschied macht. Die Dimension der Homologiegruppen hängt von der Wahl des Körpers ab. Wir bestimmen zuerst die Homologiegruppen $H_n(P, \mathbb{Q})$ für den Körper \mathbb{Q} .

In diesem Fall wird der Kern $\ker(d_1)$ von $a + b$ erzeugt und ist mit dem Bild $\text{im}(d_2)$, das von $2(a + b)$ erzeugt wird, identisch. Damit ist $H_0(P, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, während alle übrigen Homologiegruppen verschwinden.

Die ganzen Zahlen modulo 2 bilden einen Körper \mathbb{Z}_2 . Diese erhält man aus den ganzen Zahlen als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $n \simeq m$ wenn $n - m \in 2 * \mathbb{Z}$.

In diesem Körper ist $d_2 = 0$, da 2 mit 0 identifiziert ist. Damit ist $H_0(P, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, H_1(P, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, H_2(P, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

2.7 Die Kirchhoffschen Regeln

Die Kirchhoffschen Regeln lassen sich in diesem Kontext sehr einfach formulieren.

Elektrische Schaltungen lassen sich als Graph auffassen. Die Bauteile sind dabei die Kanten. Jeder Kante wird der sie durchfließende Strom zugeordnet. Die Ströme in der

Schaltung können dann als Element $i \in V(K)$, dem \mathbb{R} -Vektorraum über den Kanten K , aufgefasst werden. Die Tatsache, dass die zu- und abfließenden Ströme in einer Ecke sich aufheben läßt sich dann als $d_1(i) = 0$ formulieren. Diese ist als 1. Kirchhoffsches Gesetz, die Knotenregel, bekannt.

Die Formulierung der 2. Kirchhoffschen Regel, der Maschenregel, ist komplizierter. Den Kanten sind Spannungsdifferenzen $u : V(K) \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet. Für eine 1-Kette c mit $d_1(c) = 0$ (d.h. einen 1-Zykel) ist nach dieser Regel auch $u(c) = 0$.